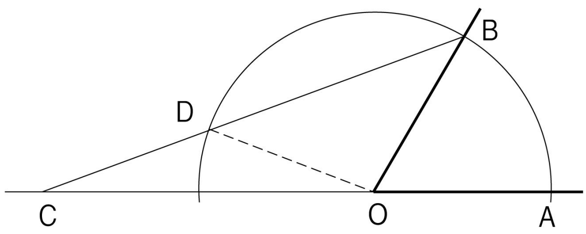
문제1 [60점]

(가) 적당한 도구를 사용하여 다양한 기하학적 도형을 그리는 것을 작도라 한다. 고대 그리스인들은 눈금 없는 자와 컴퍼스만으로 할 수 있는 작도에 대해 연구하여 여러 가지 도형들의 작도법을 발견하였다. 그 이후로 기하학적 작도는 그들의 전통을 따라 눈금 없는 자와 컴퍼스만으로 하는 작도를 일컫게 되었다.

기하학적 작도에서 컴퍼스는 주어진 점을 중심으로 주어진 길이를 반지름으로 하는 원을 그리는 도구이고, 눈금 없는 자는 주어진 두 점을 지나는 직선이나, 주어진 원에 원 바깥에 주어져 있는 점으로부터 접선을 긋는 도구이다. 예를 들면, 주어진 선분의 수직이등분선, 주어진 각의 이등분선, 주어진 길이를 한 변으로 하는 정삼각형, 정사각형 등은 기하학적으로 작도 가능한 도형이다.

임의의 각을 3등분하기, 주어진 정육면체의 두 배의 부피를 갖는 정육면체의 한 변을 작도하기, 주어진 원과 넓이가 같은 정사각형의 한 변을 작도하기 등을 3대 작도불능 문제라 한다. 오랫동안 미해결로 남아있던 이 작도문제들이 기하학적으로는 불가능하다는 것이 근세에 대수적으로 증명되었다.

다소 변칙적인 방법으로 임의의 각을 3등분하는 방법은 오래전부터 다양하게 알려져 있다. 기원전 사람인 아르키메데스(Archimedes)는 뉴시스 작도(neusis construction)라 하는 다음과 같은 방법으로 임의로 주어진 각을 3등분할 수 있다는 것을 보였다.



[그림 1]

[그림 1]에서 $\angle AOB$가 주어진 각이고, $\angle ACB$가 $\angle AOB$의 3등분각이다. $\angle ACB$를 작도하려면, 먼저 주어진 각의 꼭지점인 O를 중심으로 하는 원을 그려서 주어진 각의 변과 만나는 점 A와 B를 구하고, 각의 변 OA를 점 O의 방향으로 연장한 직선을 긋는다. 다음으로 자를 직선 OA와 맞추어 점 O와 A에 대응되는 위치를 자 위에 표시한다. 전통적인 기하학적 작도에서는 이렇게 자 위에 표시를 할 수 없다. 마지막으로 자 위에 표시된 이 점들이 직선 OA 위의 점 C와 원 O 위의 점 D에 각각 위치하게 자를 움직여 점 B를 지나는 직선 BC를 긋는다. 즉, 선분 CD와 선분 OA의 길이가 같아지게 직선 BC를 긋는다. 이렇게 작도하면 $\angle ACB$가 $\angle AOB$의 3등분각이 되는 것은 다음과 같이 증명할 수 있다:

$CD = OA = OD$이므로 $\triangle OCD$는 이등변삼각형이고

$$\angle OCD = \angle COD.$$

따라서,

$$\begin{aligned} \angle ODB &= \angle OCD + \angle COD \\ &= 2\angle OCD \\ &= 2\angle ACB. \end{aligned}$$

그리고 $OB = OD$이므로 $\triangle OBD$는 이등변삼각형이고

$$\angle ODB = \angle OBD.$$

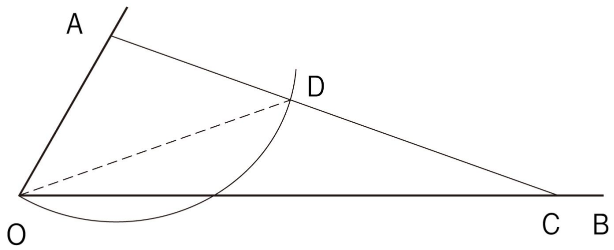
따라서,

$$\begin{aligned}\angle BOD &= 180^\circ - (\angle ODB + \angle OBD)\\ &= 180^\circ - 2\angle ODB\\ &= 180^\circ - 4\angle ACB.\end{aligned}$$

그러므로,

$$\begin{aligned}\angle AOB &= 180^\circ - (\angle BOD + \angle COD)\\ &= 180^\circ - ((180^\circ - 4\angle ACB) + \angle ACB)\\ &= 3\angle ACB.\end{aligned}$$

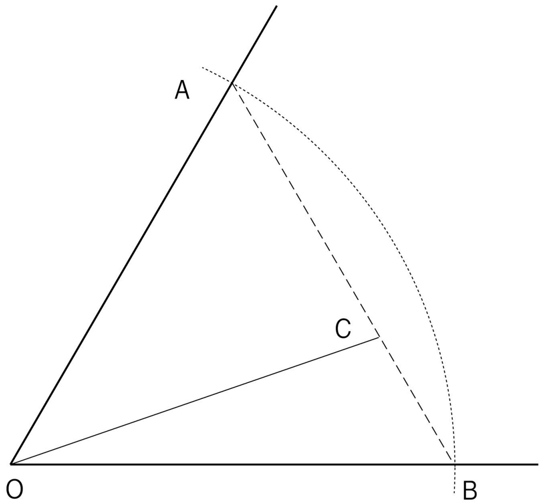
(나) 다음 [그림2]와 같이, 각의 한 변 위에 한 점 A를 잡고 점 A를 중심으로 하고 각의 꼭지점 O를 지나는 원호 S를 그린다. 이 원호 S 위에 점 D를 잘 잡아 직선 AD와 각의 다른 변 OB와의 교점 C에 대해 $OD = CD$가 되면, $\angle COD$가 주어진 각 $\angle AOB$의 3등분각이 된다.



[그림 2]

전통적인 기하학적 작도법이나 뉴시스 작도법으로는 이와 같은 점 D를 작도할 수 없다. 그러나 다음과 같은 방법으로 D에 임의로 가까운 점들을 작도할 수 있다. 먼저 원호 S 위에 한 점 D_1을 잡고, $OD_1 = C_1D_1$인 점 C_1을 변 OB 위에 잡는다. 다음으로 직선 AC_1과 원호 S의 교점을 D_2라 하고 $OD_2 = C_2D_2$인 점 C_2를 변 OB 위에 잡는다. 이런 과정을 반복하여 원호 S 위에 점 $D_1, D_2, D_3, \cdots$를 잡으면 이 점들은 한 점으로 수렴하게 되는데, 이 극한점이 점 D가 된다.

(다) 각을 3등분하는 것은 각의 꼭지점을 중심으로 하는 원이 각의 두 변에 의해서 잘려진 원호를 3등분하는 것과 같다. [그림 3]과 같이 현을 3등분하는 것으로는 3등분각을 작도할 수 없으나 주어진 각의 크기가 작을 때에는 3등분각에 가까운 각을 얻을 수 있다.



[그림 3]

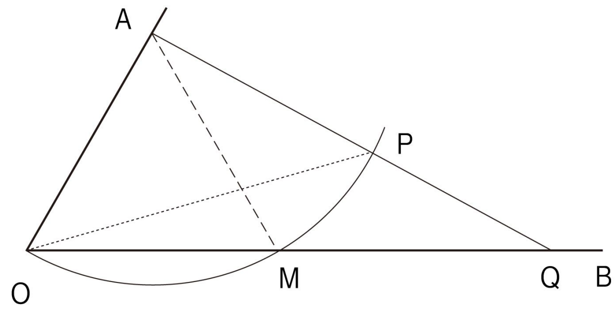
[그림 3]에서 $OA=OB$이고 점 C는 현 AB를 $2:1$로 내분하는 점이다. $\angle AOB$와 $\angle BOC$의 크기를 각각 α와 β라 하면 다음 부등식이 성립한다:

(1) $$\left|\beta-\frac{1}{3}\alpha\right|\leq\frac{3}{25}\alpha^2$$ (단, 각의 단위는 라디안(radian)이다)

즉, α가 작을 때 β는 $\alpha/3$의 근사값이 된다. 실제로, $\angle AOB$가 30°일 때 $\angle BOC$의 3배는 약 29.896°가 된다.

[문제 1-1](12점) [그림 2]에서 $AO=AD$이고 $OD=CD$이면, $\angle COD$가 $\angle AOB$의 3등분각이 됨을 제시문 (가)를 참조하여 증명하라.

[문제 1-2](12점) 아래 그림에서 예각 $\angle AOB$와 점 A는 고정되어 있고, A를 중심으로 하고 AO를 반지름으로 하는 원 S와 변 OB의 교점은 M이다. 점 P는 원 S 위를 움직이며, 점 Q는 직선 AP와 변 OB의 교점이다.



$\angle AOB$와 $\angle MAP$의 크기를 각각 α와 γ라 할 때, $\lim_{\gamma\to 0}\frac{PQ}{OP}$와 $\lim_{\gamma\to\alpha}\frac{PQ}{OP}$를 구하고, 이를 이용하여 원 S 위에 $OP=PQ$인 점 P가 존재함을 설명하라.

[문제 1-3](12점) 제시문 (나)에 나오는 점 $D_1, D_2, D_3, \cdots$들이 점 D에 수렴함을 보일 때 다음 사실들을 이용할 수 있다.

(a) $OD_n < OD$이면 $OD_n < OD_{n+1} < OD$이다.

(b) $OD_n > OD$이면 $OD_n > OD_{n+1} > OD$이다.

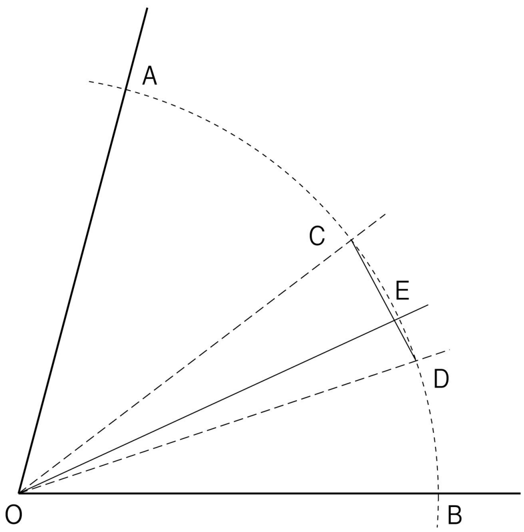
(a)를 증명하라.

[문제 1-4](12점) [그림 3]에서 $\angle AOB$와 $\angle BOC$의 크기를 각각 α와 β라 할 때, $\cos(\beta)$를 α에 관한 식으로 나타내어라.

[문제 1-5](12점) 다음 그림에서 OC는 $\angle AOB$의 이등분선이고, OD는 $\angle BOC$의 이등분선이며, 점 E는 현 CD를 $2:1$로 내분하는 점이다. $\angle AOB$와 $\angle BOE$의 크기를 각각 α와 δ라 할 때, δ가 $\alpha/3$의 근사값이 됨을 설명하고, 부등식

$$\left|\delta - \frac{1}{3}\alpha\right| \leqq \frac{3}{400}\alpha^2$$

이 성립함을 증명하라.



문제 2[40점]

1827년 영국의 식물학자 로버트 브라운은 액체속의 꽃가루를 현미경으로 관찰하던 중 꽃가루 알갱이가 액체 속에서 끊임없이 불규칙한 운동을 하며 떠다니는 현상을 발견하였다. 브라운은 꽃가루의 운동이 꽃가루 내부의 생명에너지에 의해 일어난다고 생각하였으나, 물리학자들은 내부 유체의 불규칙한 유동현상(유체분자의 충돌현상에 의해 일어남)이 꽃가루를 통하여 보여 지는 것이라고 결론지었다. 그리고 이 현상을 발견한 과학자의 이름을 따서 브라운 운동이라고 하였다. 또 물리학자들은 온도가 높거나, 입자의 알갱이가 작을수록 브라운 운동이 활발해짐을 발견했다. 특히 천재 물리학자 아인슈타인은 입자들의 평균이동 거리를 확률적 방법을 응용하여 계산하였다. 브라운 운동은 분자레벨의 모든 자연현상에서 일어나며, 가장 간단한 예로, 투명 용액 속에 붉은 잉크를 한방을 떨어뜨릴 때, 잉크가 확산되어 전체용액이 오랜 시간 후 엷은 붉은색 용액으로 바뀌는 현상을 들 수 있다. 현대에는 브라운 현상이 물리적 현상뿐만 아니라, 정보망을 통한 정보의 확산과정, 주식의 가격 변동 등 경제 현상을 설명하는 주요한 수학적 도구로 활용되고 있다. 우리는 간단한 1차원 격자상의 불규칙한 유동현상(이를 랜덤워크라 부른다)실험을 통하여, 이 현상을 이해하고자 한다. 총질량 1그램의 물질을 고려해보자. 물질은 3개의 격자점 $[-1, 0, 1]$ 위에만 분포하며, 매초마다 물질은 반반씩 이웃한 격자로 확산된다. 만일 (m_{-1}^k, m_0^k, m_1^k)을 k초 후의 각 격자점에서의 물질의 질량이라고 정의하면, $k+1$초 후의 질량은 점화식 $m_{-1}^{k+1} = \dfrac{m_{-1}^k + m_0^k}{2},\ m_0^{k+1} = \dfrac{m_{-1}^k + m_1^k}{2},\ m_1^{k+1} = \dfrac{m_0^k + m_1^k}{2}$을 만족한다. 즉, 초기 물질의 질량 분포가 $(0, 1, 0)$이라 하면, 1초 후에는 $(1/2, 0, 1/2)$이 되고, 2초 후에는 $(1/4, 1/2, 1/4)$이 된다.

※제시문을 읽고 다음의 질문에 답하시오.

[문제 2-1](8점) $(m_{-1}^k,\ m_0^k,\ m_1^k)$ 가 시간이 갈수록 $(k \to \infty)$ 수렴한다고 할 때, 수렴 값 $(m_{-1},\ m_0,\ m_1)$을 구하는 과정을 기술하고 그 값을 구하라.

[문제 2-2](12점) 초기치가 $(m_{-1}^0,\ m_0^0,\ m_1^0) = (0,1,0)$ 이면, 유한시간 k초에 수렴 하는지를 판단하여 기술하라.

[문제 2-3](8점) k초 후에 이웃하는 격자점들 간의 질량차를

$$d_{1/2}^{k}=m_{1}^{k}-m_{0}^{k},\ \ d_{-1/2}^{k}=m_{0}^{k}-m_{-1}^{k}$$

로 정의하며, 내부 격자점 0에서 질량차의 차이를

$$D^{k}=d_{1/2}^{k}-d_{-1/2}^{k}$$

으로 정의한다. 또 내부 격자점 0에서 시간 k 및 $k+1$간의 질량차를 $e^{k}=m_{0}^{k+1}-m_{0}^{k}$ 로 정의하자.

이 때 D^{k} 와 e^{k} 의 관계식을 구하라.

[문제 2-4](12점) 격자점에서의 질량 $(m_{-1}^{k},\ m_{0}^{k},\ m_{1}^{k})$가 오랜 시간이 지나면 $(k\rightarrow\infty)$ 반드시 수렴함을 보여라.

(힌트: $(m_{-1}^{k},\ m_{0}^{k}, m_{1}^{k})$ = $(m_{0}^{k}+\alpha_{k},\ \ m_{0}^{k},\ \ m_{0}^{k}+\beta_{k})$로 두고 풀어라)