1-1. <10 점> 시점이 $V(a,b,-c)$일 때, 공간의 점 $P(x,y,z)$와 투시도면 위의 대응점 $P'(x',y',0)$사이의 관계에 의해 x' 과 y'을 각각 $x,\ y,\ z$의 식으로 나타내어라.

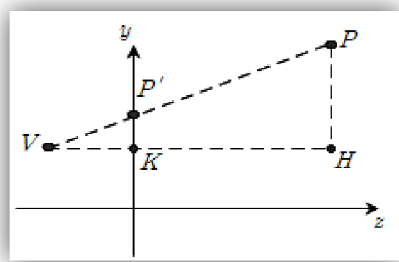

그림 1

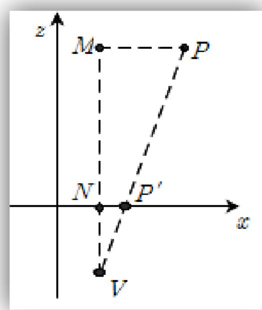

그림 2

풀이. <그림 1>에서 삼각형 VHP와 삼각형 VKP'이 닮은꼴이므로 $VH:VK=PH:P'K$ 이다. 이로부터 좌표 사이에 관계식 $z+c:c=y-b:y'-b$ 가 성립한다. 이것을 풀면 $\boldsymbol{y'=\frac{c(y-b)}{z+c}+b}$ 이다.

<그림 2>에서 삼각형 VMP와 삼각형 VNP'이 닮은꼴이므로 $VM:VN=PM:P'N$ 이다. 이로부터 좌표 사이에 관계식 $z+c:c=x-a:x'-a$ 가 성립한다. 이것을 풀면 $\boldsymbol{x'=\frac{c(x-a)}{z+c}+a}$ 이다.

1-2. <10 점> 공간의 점 $A(7,1,3)$과 $B(6,2,4)$에 대응되는 투시도면 위의 점이 각각 $A'\left(\frac{9}{2},-2,0\right)$과 $B'\left(\frac{26}{7},-2,0\right)$일 때, 시점 V의 좌표를 구하라.

풀이. V의 좌표를 $(a,b,-c)$라 두면, A와 A'으로부터 $\begin{cases}\frac{9}{2}=\frac{c(7-a)}{3+c}+a\\ -2=\frac{c(1-b)}{3+c}+b\end{cases}$ 그리고 B와 B'으로부터 $\begin{cases}\frac{26}{7}=\frac{c(6-a)}{4+c}+a\\ -2=\frac{c(2-b)}{4+c}+b\end{cases}$ 를 얻을 수 있다. 이를 정리하면 $\begin{cases}6a+5c=27\\ b+c=-2\\ 7a+4c=26\end{cases}$ 이 된다. 이 연립방정식을 풀면 $a=2,\ b=-5,\ c=3$ 이다. 따라서 시점 V의 좌표는 $\mathbf{(2,-5,-3)}$ 이다.

1-3. <10 점> 시점이 $V(1,2,-3)$일 때, 매개변수방정식 $x=3+2t,\ y=3-3t,\ z=3+t$로 주어지는 공간 내의 직선 ℓ의 투시도면 위의 이미지 ℓ'의 소실점의 좌표를 구하라.

풀이. 직선 ℓ의 방향비가 $2,-3,1$이므로 시점 V를 지나고 직선 ℓ에 평행인 직선의 매개변수방정식은 $\begin{cases}x=1+2t\\ y=2-3t\\ z=-3+t\end{cases}$이다. 이 직선이 투시도면과 만나는 점이 ℓ'의 소실점이므로 $z=-3+t=0$ 으로부터 $t=3$을 얻고, 이를 x와 y에 대입하여 $x=7,\ y=-7$ 을 얻는다. 따라서 구하는 소실점의 좌표는 $\mathbf{(7,-7,0)}$ 이다.

1-4. <20 점> 공간에 xz-평면에 평행인 정사각형 $ABCD$가 있다. 변 AB가 투시도면에 수직이고, 꼭지점 A, B, C, D에 대응되는 투시도면 위의 점이 각각 $A'\left(-\frac{8}{13},\frac{23}{13},0\right)$, $B'\left(-\frac{3}{8},\frac{9}{4},0\right)$, $C'\left(\frac{11}{4},\frac{9}{4},0\right)$, $D'\left(\frac{17}{13},\frac{23}{13},0\right)$이다.

① 직선 $A'B'$ 의 소실점 S의 좌표를 구하라.

풀이. 직선 AB와 직선 CD가 평행이므로 직선 $A'B'$과 직선 $C'D'$의 소실점은 같다. 따라서 직선 $A'B'$과 직선 $C'D'$의 교점이 구하는 소실점이다. 투시도면 위에서 직선 $A'B'$의 방정식은 $y=2x+3$ 이고, 직선 $C'D'$의 방정식은 $y=\frac{1}{3}x+\frac{4}{3}$ 이다. 이 두 방정식을 연립하여 풀면 $x=-1$, $y=1$이다. 따라서 소실점 S의 좌표는 $(\mathbf{-1,1,0})$ 이다.

② 직선 $A'C'$의 소실점 T의 좌표를 구하라.

풀이. 직선 VS는 직선 AB에 평행이고, 직선 VT는 직선 AC에 평행이므로 직선 VS와 직선 VT는 xz-평면에 평행이다. 그러므로 직선 ST도 xz -평면에 평행이어서 투시도면 위에서 직선 ST는 x-축에 평행이고, 방정식은

$$y=1$$

이다. 이 방정식과 직선 $A'C'$의 방정식

$$y=\frac{1}{7}x+\frac{13}{7}$$

을 연립하여 풀면 $x=-6$, $y=1$이다. 따라서 소실점 T의 좌표는

$$(\mathbf{-6,1,0})$$

이다.

③ 시점 V의 좌표를 구하라.

풀이. V의 좌표를 $(a,b,-c)$라 두자. 직선 VS는 직선 AB에 평행이므로 직선 VS는 투시도면에 수직이다. 따라서 두 점 V와 S의 x-좌표와 y-좌표는 각각 같다. 즉,

$$a=-1,\qquad b=1$$

이다. 직선 VT는 직선 AC와 평행이고, 직선 AC가 직선 AB와 이루는 각이 $45°$이므로 각 SVT는 $45°$이다. 따라서 삼각형 SVT는 직각이등변 삼각형이므로 선분 VS의 길이와 선분 ST의 길이는 같다. 즉,

$$c = \text{선분 } ST\text{의 길이} = 5$$

이다. 따라서 V의 좌표는

$$(\mathbf{-1,1,-5})$$

이다.

2-1. <10점> **제시문 나**에 의하면 $x+1=O(x^2+1)$, $(x \geqq 0)$이 성립한다. 임의의 $x \geqq 0$에 대하여

$$x+1 \leqq C(x^2+1)$$

를 만족하는 가장 작은 실수 C를 구하라.

풀이. 임의의 $x \geqq 0$에 대하여 $x+1 \leqq C(x^2+1)$이 성립하기 위한 필요충분조건은 $x \geqq 0$에서의 이차 함수 $F(x)=Cx^2-x+C-1$의 최소값 $F\left(\frac{1}{2C}\right)=-\frac{1}{4C}+C-1$이 0 이상인 것이다. 즉, $-\frac{1}{4C}+C-1 \geqq 0$. 이 부등식을 풀면 $C \geqq \frac{2+2\sqrt{2}}{4}$. 따라서, 주어진 부등식을 만족하는 가장 작은 양의 실수 C는 $\mathbf{\frac{2+2\sqrt{2}}{4}}$이다.

2-2. <10점> 자연수 n에 대하여

$$f_1(n)=\frac{n^2}{n+1}, \qquad f_2(n)=\sum_{k=1}^{n}\left(f_1(k+1)+f_1(k^2)\right)$$

으로 정의할 때 $f_2(n)=O(n^\alpha)$, $(n \geqq 1)$을 만족하는 가장 작은 실수 α를 구하라.

풀이. 임의의 자연수 n에 대하여 부등식 $n \leqq n+1 \leqq 2n$이 성립하므로, $\frac{n}{2} \leqq f_1(n) \leqq n$이 성립한다. 따라서 자연수 n에 대한 다음 두 부등식을 얻는다:

$$f_2(n)=\sum_{k=1}^{n}\left(f_1(k+1)+f_1(k^2)\right) \leqq \sum_{k=1}^{n}(k+1+k^2) \leqq \sum_{k=1}^{n}3k^2=3\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \leqq 3n^3$$

$$f_2(n)=\sum_{k=1}^{n}\left(f_1(k+1)+f_1(k^2)\right) \geqq \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k+1}{2}+\frac{k^2}{2}\right) \geqq \sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{2}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{2\cdot 6} \geqq \frac{n^3}{6}$$

일반적으로 $\alpha \geqq 3$인 경우 $n^3=O(n^\alpha)$이 성립하므로, $f_2(n)=O(n^\alpha)$ 임을 알 수 있다.
한편, $\alpha<3$인 경우, $n^{3-\alpha}$는 한없이 커지므로 $f_2(n)=O(n^\alpha)$가 성립할 수 없다.
따라서, $f_2(n)=O(n^\alpha)$를 만족하는 가장 작은 실수 α는 **3**이다.

2-3. <5점> $N_D(6.5)$와 $N_S(6.5)$는 각각 얼마인가?

풀이. $N_D(6.5)$를 구하기 위해서는 주어진 정수 $-6 \leqq x \leqq 6$를 만족하는 각각의 정수 x에 대하여 $x^2+y^2 \leqq 6.5^2$을 만족하는 정수 y의 개수를 구하여 모두 더하면 된다. 대칭성을 이용하여 이 값을 구하면

$$\begin{aligned} N_D(6.5) &= 6\cdot 2+1+2\big((6\cdot 2+1)+(6\cdot 2+1)+(5\cdot 2+1)+(5\cdot 2+1)+(4\cdot 2+1)+(2\cdot 2+1)\big) \\ &= \mathbf{137} \end{aligned}$$

비슷한 방법으로 $N_S(6.5)$를 구하면

$$N_S(6.5)=13+12+4(11+9+7+5+3+1)=\mathbf{85}.$$

2-4. <10점> 다음 관계가 성립함을 보여라.

$$E_D(r) = O(r), \qquad r \geqq 2$$

풀이. 제시문 다에 의하면 아래 부등식이 성립한다.

$$|E_D(r)| \leqq N_2(r) + N_3(r).$$

한편, $N_2(r) + N_3(r)$는 반지름이 $r + \sqrt{2}$인 원과 반지름이 $r - \sqrt{2}$인 원으로 둘러 싸인 영역의 넓이를 넘지 않으므로

$$|E_D(r)| \leqq \pi\left(r + \sqrt{2}\right)^2 - \pi\left(r - \sqrt{2}\right)^2 = 2\sqrt{2}\pi r$$

따라서, 다음 식이 성립한다:

$$E_D(r) = O(r), \qquad r \geqq 2$$

2-5. <15점> N_S와 E_S에 관한 다음 물음에 답하라.

① <5점> 자연수 m에 대한 $N_S(m)$의 일반식을 구하라.

풀이. 자연수 m에 대하여

$$N_S(m) = 2m + 1 + 2\sum_{k=1}^{m}(2(m-k)+1) = \mathbf{2m^2 + 2m + 1}$$

가 성립한다.

② <5점> $r = m + t$ (M 은 자연수, $0 \leqq t < 1$)로 놓고 $E_S(r)$를 r과 t로 표현하라.

풀이. 격자점은 정수들로 구성되므로 아래 등식이 성립한다:

$$N_S(r) = N_S(m).$$

이 등식과 ①의 결과를 활용하면

$$E_S(r) = N_S(r) - A_S(r) = 2m^2 + 2m + 1 - 2r^2 = 2(r-t)^2 + 2(r-t) + 1 - 2r^2$$

즉,

$$E_S(r) = 2r(-2t+1) + 2t^2 - 2t + 1.$$

③ <5점> 아래 관계식을 만족하는 가장 작은 실수 β를 구하라.

$$E_S(r) = O\left(r^\beta\right), \qquad r \geqq 2$$

풀이. ②에서와 같이 $r = m + t$ (m은 자연수, $0 \leqq t < 1$)로 놓으면, 다음 부등식을 얻는다:

$$|E_S(r)| \leqq 2r + 1 \leqq 3r$$

즉, $E_S(r) = O(r)$ 이 성립한다. 따라서, 임의의 $\beta \geqq 1$에 대하여 $E_S(r) = O(r^\beta)$이 성립한다.

한편, 자연수 m에 대하여 $N_S(m) = 2m^2 + 2m + 1$, $A_S(m) = 2m^2$, $|E_S(m)| \geqq 2m$이므로 $\beta < 1$에 대하여 $E_S(r) = O(r^\beta)$가 성립할 수는 없다.

따라서, $E_S(r) = O\left(r^\beta\right)$, $r \geqq 2$를 만족하는 가장 작은 실수 β는 **1** 이다.